7.7 Katlı Özdeğerler

$$x' = Ax \qquad (7.16)$$

sisteminde A reel veya kompleks değerli ve A'nın özdeğerleri katlı olsun. Eğer $r=\rho$, k katlılığa sahip ve buna karşı gelen k tane lineer bağımsız özvektör varsa k tane lineer bağımsız çözüm vardır. A Hermityen ise bu durum daima sağlanır. A Hermityen değil ise lineer bağımsız özvektör k'dan daha az olabilir. Bu durumda çözüm zordur.

<u>Örnek:</u> $x'=Ax=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}x$ sisteminin genel çözümünü bulunuz.

$x=\xi e^{rt}$ şeklinde çözüm aradığımızda $\begin{pmatrix}2-r&-1\\1&4-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ cebirsel denklemi çözmemiz gerekir. Bu denklemin sıfırdan farklı çözümlerinin olabilmesi için

$$\begin{vmatrix}2-r&-1\\1&4-r\end{vmatrix}=r^2-6r+9=(r-3)^2=0$$

olmalıdır. $r_1=r_2=3$ katlı özdeğerdir. (katlılığı ikidir). $r_1=r_2=3$'e karşı gelen özvektör;

$$\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \xi^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

dir. İlk çözüm

$$x^{(1)}(t)=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{3t}$$

dir. Fakat

$$x^{(2)}(t)=\xi^{(2)}e^{rt}$$

formunda ikinci çözüm yoktur. İkinci mertebeden lineer dif. denklemlerdeki yönteme dayanarak ikinci çözümü

$$x=\xi t e^{3t} \qquad (7.19)$$

formunda arayalım. Denklemde yerine yazarsak

$$\xi e^{3t}+3\xi t e^{3t}=A\xi t e^{3t} \qquad (7.20)$$

elde ederiz. Bu denklemin her t için sağlanması için $\xi=0$ olmalıdır. Dolayısıyla (7.19) formunda, sistemin çözümü yoktur. (7.20) denkleminde hem te^{3t} hemde e^{3t}'nin terimleri bulunduğundan çözümü

$$x=\xi t e^{3t}+\eta e^{3t} \qquad (7.21)$$

formunda aramalıyız. Burada ξ ve η sabit vektörlerdir. (7.21) denklemini soruda yerine yazarsak

$$3\xi t e^{3t} + (\xi + 3\eta) e^{3t} = A(\xi t e^{3t} + \eta e^{3t})$$

elde ederiz. e^{3t} ve te^{3t}'nin katsayıları eşit olması için

$$(A-3I)\xi = 0$$

ve

$$(A-3I)\eta = \xi \qquad (7.22)$$

şartları sağlanmalıdır. A'nın özdeğeri 3 olduğundan $\xi = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sağlanır. (7.22)'nin çözümünden

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1\end{array}\right) \Rightarrow \eta_1+\eta_2=-1 \qquad \begin{array}{l}\eta_1 = k\\ \eta_2 = 1-k\end{array} \qquad \eta = \begin{pmatrix}k\\-1-k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

bulunur. (7.21)'de ξ ve η değerlerini yerine yazarsak

$$x = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} t e^{3t} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} e^{3t} + k\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} e^{3t}$$

elde ederiz. Son terim $x^{(1)}$ çözümünün bir katı olduğundan atabiliriz. İlk iki terim yeni çözümdür,

$$x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} t e^{3t} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} e^{3t}$$

dir. $W[x^{(1)}, x^{(2)}](t) = -e^{6t} \neq 0$ olduğundan $x^{(1)}$ ve $x^{(2)}$ temel çözüm kümesidir. Buna göre genel çözüm

$$x = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t) = c_1 \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} t e^{3t} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} e^{3t}\right]$$

dir.

Bu işlemi genel durumda uygulayalım. (7.16) sistemi verilsin. A'nın $r=\rho$ iki katlı özdeğeri ve bu özdeğere yalnız ξ özvektörü karşı gelsin. Bu durumda bir çözüm

$$x^{(1)}(t) = \xi e^{\rho t} \qquad (7.23)$$

dir. Burada ξ, $(A-\rho I)\xi = 0$ denklemini sağlar. İkinci çözüm

$$x^{(2)}(t) = \xi t e^{\rho t} + \eta e^{\rho t} \qquad (7.24)$$

şeklindedir. Burada ξ, $(A-\rho I)\xi = 0$ denklemini sağlar ve η, $(A-\rho I)\eta = \xi$ denkleminden belirlenir.

Eğer A matrisinin $r=\rho$ üç katlılığa sahip özdeğeri ve bu özdeğere yalnız ξ özvektörü karşı geliyorsa birinci çözüm (7.23), ikinci çözüm (7.24), üçüncü çözüm

$$x^{(3)}(t) = \xi \frac{t^2}{2!} e^{\rho t} + \eta t e^{\rho t} + z e^{\rho t}$$

formundadır. Burada ξ, $(A-\rho I)\xi = 0$, η, $(A-\rho I)\eta = \xi$ denklemini sağlarlar ve z, $(A-\rho I)z = \eta$ denkleminden belirlenir.

Eğer A matrisinin $r=\rho$ üç katlılığa sahip özdeğeri ve bu özdeğere $\xi^{(1)}$ ve $\xi^{(2)}$ lineer bağımsız özvektörleri karşı geliyorsa sistemin iki çözümü

$$x^{(1)}(t)=\xi^{(1)}e^{\rho t}\quad,\quad x^{(2)}(t)=\xi^{(2)}e^{\rho(t)}$$

formundadır. Üçüncü çözüm

$$x^{(3)}(t)=\xi t e^{\rho t}+\eta e^{\rho t}$$

formundadır. Burada ξ, $(A-\rho I)\xi=0$ denklemini sağlar ve η, $(A-\rho I)\eta=\xi$ denkleminden çözülür. ξ'yi $\xi^{(1)}$ ve $\xi^{(2)}$'nin denklemi çözecek uygun bir birleşimi olarak almalıyız.

Eğer A matrisinin $r=\rho$ dört veya daha yüksek katlılığa sahip özdeğeri varsa çözümler daha karışık hale gelirler. Bu derste yalnız en fazla üç katlılığa sahip özdeğerler incelenecektir.

Örnekler: 1) $x'=\begin{pmatrix}3 & 9\\ -1 & -3\end{pmatrix}x$, $x(0)=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$x=\xi e^{rt}$ formunda çözüm aradığımızda $\begin{pmatrix}3-r & 9\\ -1 & -3-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ cebirsel denklem sistemini çözmemiz gerekir. Bu denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olması için

$$\begin{vmatrix}3-r & 9\\ -1 & -3-r\end{vmatrix}=r^2=0 \qquad r_1=r_2=0$$

$r=0$'a karşı gelen özvektör $\xi^{(1)}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ dir. Birinci çözüm

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}e^{0.t}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$$

dir. İkinci çözümü

$$x=\xi t e^{0.t}+\eta e^{0.t}=\xi t+\eta$$

formunda arıyoruz. Burada ξ, $A\xi=0$ denklemini sağlıyor. Yani $\xi=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ dir. η'da $A\eta=\xi$ denkleminden elde edilecek:

$$\begin{pmatrix}3 & 9\\ -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\Rightarrow -\eta_1-3\eta_2=-1 \qquad \eta_2=k,\ \eta_1=1-3k$$

$$\eta=\begin{pmatrix}1-3k\\ k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{k \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{birinci çözümün katı}}$$

$$x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dır. Genel çözüm

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

dır. $t=0$ da $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c_1 = -4 \quad c_2 = 14$

$$x = -4 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + 14 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 42 \\ -14 \end{pmatrix} t$$

2) $x' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -4 & -4 & -2 \\ 8 & 12 & 6 \end{pmatrix} x$ sisteminin genel çözümünü bul.

$x = \xi e^{rt}$, $\begin{pmatrix} 4-r & 3 & 1 \\ -4 & -4-r & -2 \\ 8 & 12 & 6-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 4-r & 3 & 1 \\ -4 & -4-r & -2 \\ 8 & 12 & 6-r \end{vmatrix} = -(r-2)^3 = 0$

$r_1 = r_2 = r_3 = 2$ özdeğer. $r=2$'ye karşı gelen özvektör

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -4 & -6 & -2 \\ 8 & 12 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 = 0 \Rightarrow \xi = k \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

lineer bağımsız özvektörlerdir.

$$x^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} , \quad x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t}$$

üçüncü çözümü

$$x = \xi t e^{2t} + \eta e^{2t}$$

formunda arıyoruz. η'yı çözebilmek için ξ'yi

$$\xi = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

olarak alıyoruz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & -6 & -2 & -2 \\ 8 & 12 & 4 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow 2\eta_1 + 3\eta_2 + \eta_3 = 1 \qquad \begin{array}{l} \eta_1 = \rho \\ \eta_2 = s \\ \eta_3 = 1 - 2\rho - 3s \end{array}$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \rho \\ s \\ 1-2\rho-3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t}$$

son iki terim 1. ve 2. çözümde olduğundan 3. çözüm

$$x^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

dir.

Genel Çözüm

$$X = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\-3\end{pmatrix}e^{2t} + c_3\left[\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t}\right]$$

dir.

3) $x' = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -3 & 2 & 4\end{pmatrix}x$ sisteminin genel çözümünü bulunuz.

$$x = \xi e^{rt}, \quad \begin{pmatrix}1-r & 1 & 1\\ 2 & 1-r & -1\\ -3 & 2 & 4-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix}1-r & 1 & 1\\ 2 & 1-r & -1\\ -3 & 2 & 4-r\end{vmatrix} = -(r-2)^3 = 0$$

$r_1 = r_2 = r_3 = 2$ karşı gelen özvektör $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \xi^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$x^{(1)} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}$ ikinci çözüm $x = \xi te^{2t} + \eta e^{2t}$ $\quad \xi = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

$$(A-2I)\eta = \xi \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\eta_2+\eta_3 = 1\\ -\eta_1+\eta_2+\eta_3 = 0\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\eta_1 = 1\\ \eta_2 = k\\ \eta_3 = 1-k\end{matrix}$$

$$\eta = \begin{pmatrix}1\\k\\1-k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t} + \underbrace{k\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}}_{\text{1. çözümde vardır.}}$$

$x^{(2)}(t) = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t}$ dir. Üçüncü çözüm

$$x = \xi\frac{t^2}{2!}e^{2t} + \eta te^{2t} + \tau e^{2t} \qquad \xi = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$(A-2I)\tau = \eta \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\k\\1-k\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\tau_2+\tau_3 = k+2\\ -\tau_1+\tau_2+\tau_3 = 1\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\tau_2 = m\\ \tau_3 = k-m+2\\ \tau_1 = k+1\end{matrix}$$

$$\tau = \begin{pmatrix}k+1\\m\\k-m+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2!}e^{2t} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]te^{2t} + \left[\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right]e^{2t}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}t^2e^{2t} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}te^{2t} + \underbrace{k\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}te^{2t}}_{\text{2. çözümde var}} + \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}e^{2t} + \underbrace{k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t}}_{\text{2. çözüm}} + \underbrace{m\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}}_{\text{1. çözüm}}$$

$$x^{(3)}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}t^2e^{2t} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}e^{2t}$$

$$X = c_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}e^{2t}\right] + c_3\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}t^2e^{2t} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}e^{2t}\right]$$

7.8 Temel Matrisler

Bir $\alpha < t < \beta$ aralığında, $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$

$$x' = p(t)\, x \qquad (7.14)$$

sisteminin bir temel çözüm kümesini oluştursun. $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ vektörlerini sütun kabul eden

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

matrisine (7.14) sisteminin bir <u>temel matrisi</u> denir. Herhangi temel matris sütunları lineer bağımsız vektörlerden oluştuğundan singüler değildir.

(7.14) sisteminin genel çözümü

$$x = c_1 x^{(1)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$$

ise bu çözümü, c bileşenleri $c_1, c_2, \dots, c_n$ olan sabit bir vektör olmak üzere

$$x = \psi(t)\, c$$

şeklinde yazabiliriz. $\alpha < t < \beta$ aralığındaki bir t_0 noktasında başlangıç koşulları

$$x(t_0) = x^0$$

ise

$$\psi(t_0)\, c = x^0$$

olacaktır. $\psi(t_0)$ singüler olmadığından

$$c = \psi^{-1}(t_0)\, x^0$$

ve başlangıç değer probleminin çözümü

$$x = \psi(t)\, \psi^{-1}(t_0)\, x^0 \qquad (7.25)$$

dır.

Özel bir temel matris, t_0 noktasında birim vektör olan yani

$$x^{(j)}(t_0) = e^{(j)} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

şartını sağlayan $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ vektörlerini sütun kabul eden $\Phi(t)$ matrisidir. Yani $\Phi(t)$,

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I$$

şartını sağlar. Bu durumda başlangıç değer probleminin çözümü (7.25)

$$X=\Phi(t)X^0 \qquad (7.26)$$

şeklindedir. (7.25) ve (7.26) dan

$$\Phi(t)=\psi(t)\,\psi^{-1}(t_0)$$

sonucunu elde ederiz.

<u>Örnek:</u> $X'=\begin{pmatrix}1&1\\4&-2\end{pmatrix}X$ sisteminin bir temel matrisini bulunuz. Ayrıca $\Phi(0)=I$ şartını sağlayan temel matrisini bulunuz.

$X=\xi e^{rt}$ şeklinde çözüm aradığımızda $\begin{pmatrix}1-r&1\\4&-2-r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ cebirsel denkleminin sıfırdan farklı çözümünü bulmalıyız. Bunun için

$$\begin{vmatrix}1-r&1\\4&-2-r\end{vmatrix}=r^2+r-6=(r+3)(r-2)=0$$

olmalıdır. $r_1=-3$, $r_2=2$ özdeğerlerdir. Bunlara karşı gelen özvektörler

$$r_1=-3 \qquad \begin{pmatrix}4&1\\4&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \xi^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$$

$$r_2=2 \qquad \begin{pmatrix}-1&1\\4&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \xi^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

dır. Çözümler $x^{(1)}(t)=\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}e^{-3t}$, $x^{(2)}(t)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2t}$ dır.

Bir temel matris

$$\psi(t)=\begin{pmatrix}e^{-3t}&e^{2t}\\-4e^{-3t}&e^{2t}\end{pmatrix}$$

dir.

$$\psi(0)=\begin{pmatrix}1&1\\-4&1\end{pmatrix} \qquad \psi^{-1}(0)=\begin{pmatrix}1/5&-1/5\\4/5&1/5\end{pmatrix}$$

$$\Phi(0)=I \Rightarrow \Phi(t)=\psi(t)\psi^{-1}(0)=\begin{pmatrix}e^{-3t}&e^{2t}\\-4e^{-3t}&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/5&-1/5\\4/5&1/5\end{pmatrix}$$

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}e^{-3t}+\frac{4}{5}e^{2t} & -\frac{1}{5}e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{2t}\\ -\frac{4}{5}e^{-3t}+\frac{4}{5}e^{2t} & \frac{4}{5}e^{-3t}+\frac{1}{5}e^{2t}\end{pmatrix}$$